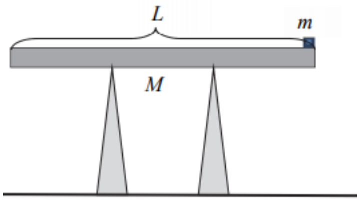
1. Egy L = 1,5 méter hosszú, M = 2 kg tömegű rudat két harmadoló pontjában támasztunk alá az ábrán látható módon. Legfeljebb mekkora m tömegű, pontszerű testet tehetünk a rúd szélére, hogy az még ne billenjen le? Mekkora erő hat az alátámasztási pontokra ekkor?
($g = 9{,}81\ m/s^2$)



(2016. október)

Megoldás:

Adatok: $L = 1{,}5$ m, $M = 2$ kg, $g = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

A jobb oldali (tehát az m tömegű testtel terhelt oldalon lévő) alátámasztási pontra vonatkozó forgatónyomaték-egyensúly helyes felírása:

6 pont
(bontható)

A forgatónyomaték-egyenletnek bármely helyes felírása elfogadható, pl.

$$M \cdot g \cdot \frac{L}{6} = m \cdot g \cdot \frac{L}{3} \quad \text{vagy} \quad \frac{2M}{3} \cdot g \cdot \frac{L}{3} = m \cdot g \cdot \frac{L}{3} + \frac{M}{3} \cdot g \cdot \frac{L}{6}$$

Két pontot ér, ha a vizsgázó világosan jelöli (rajzon vagy írásban), hogy a jobb oldali alátámasztásra, mint forgáspontra kell az egyenletet felírni, a mérlegegyenlet egy-egy helyesen felírt oldala 2–2 pontot ér.

Az egyenlet rendezése és a keresett tömeg meghatározása:

2 + 1 pont

$m = \frac{M}{2}$, azaz $m = 1$ kg.

A két alátámasztási pontra ható erő meghatározása:

3 + 3 pont

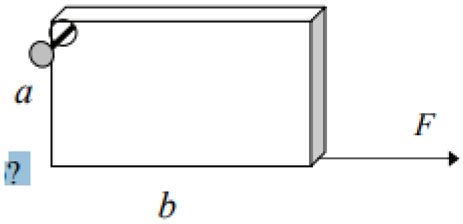
A bal oldali alátámasztási pontra nem hat erő (3 pont).

A jobb oldalira $(M + m) \cdot g = 29{,}4$ N erő hat (3 pont).

Összesen 15 pont.

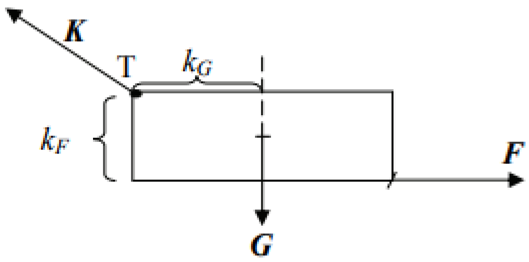
2. **Egy téglalap alakú, homogén lemezt az egyik csúcsánál egy szöggel felfüggesztünk, amely körül könnyen elfordulhat a lemez, a vele átellenes csúcsánál pedig vízszintes irányban F = 6 N erővel húzzuk. Ekkor a lemez b oldala vízszintes lesz. a = 30 cm, b = 90 cm (g = 10 m/s^2)**

a) Mekkora a lemez tömege?
b) Mekkora a lemezre ható nehézségi erő és a húzóerő eredője?
c) Mekkora a felfüggesztési pontban ható kényszererő?



(2007. október)
Megoldás:

a) A testre ható erők berajzolása:



2 pont

(A <u>K</u> kényszererő hiánya a feladat ezen részében nem tekinthető hibának, amennyiben a vizsgázó a következő pontban, az egyensúly feltételének megfogalmazásakor a T-re vonatkozó forgatónyomatékok egyensúlyával dolgozik. Az erők ábrázolásának nem kell méretarányosnak lenniük.)

Az egyensúly feltételének megfogalmazása:

3 pont

<u>F</u> és <u>G</u> (T-re vonatkozó) forgatónyomatékai egyenlők.

$$F \cdot k_F = G \cdot k_G$$

A számításhoz szükséges adatok megállapítása:

$$k_G = \frac{b}{2} = 45 \text{ cm}$$

1 pont

$$k_F = a = 30 \text{ cm}$$

1 pont

Az G súlyerő kiszámítása:

2 pont
(bontható)

$$G = \frac{k_F}{k_G} \cdot F = 4\ \mathrm{N}$$

(Amennyiben a vizsgázó a megoldás során azt használta ki, hogy a testre ható erők eredője nulla, és éppen három erő hat a testre, s ezért a hatásvonalaik egy pontban metszik egymást, akkor az utóbbi 7 pont a következőképpen oszlik meg: az elv felismerése 3 pont, az F erő kiszámítása 4 pont. Mindkét pontszám bontható.)

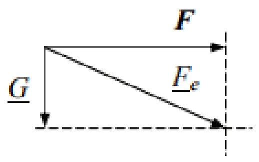
A tömeg meghatározása:

1 pont

$m = 0{,}4$ kg

b) Az eredő erő vektori meghatározásának elve (rajzban vagy szöveggel):

2 pont



Nagyságának kiszámítása Pitagorasz-tétellel:

$$F_e = \sqrt{F^2 + G^2} = 7{,}21\ \mathrm{N}$$

2 pont
(bontható)

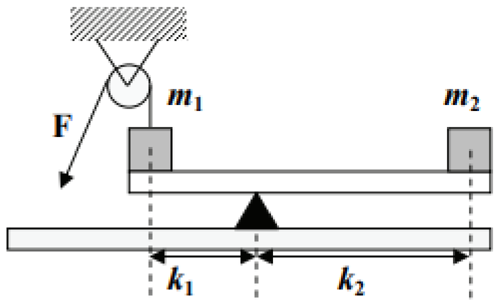
c) A kényszererő nagyságának meghatározása:

2 pont

A kényszererő nagysága egyenlő az eredő erő nagyságával.

Összesen: 16 pont

3. Az ábrán látható elrendezésben két testet helyezünk egy kétkarú mérleg két karjára, és az egyikhez csigán átvetett fonalat erősítünk. A mérleg karja súlytalannak tekinthető! Adatok: $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 2$ kg, $k_1 = 1$m, $k_2 = 2{,}5$ m, g $= 10 \mathrm{m/s^2}$



a) Mekkora F erővel kell húznunk a fonalat, hogy a rendszer egyensúlyban legyen?
b) Hová kell tennünk az m_2 testet, hogy F = 75 N erő legyen szükséges az egyensúly fenntartásához?
(2009. május)

Megoldás:

Adatok: $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$, $k_1 = 1\,\mathrm{m}$, $k_2 = 2{,}5\,\mathrm{m}$, $g = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

a) *A nyomatékegyenlet felírása a kétkarú mérleg egyensúlyára:*

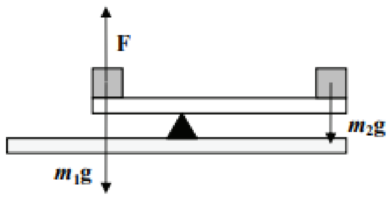
4 pont

$m_1 \cdot g \cdot k_1 - F \cdot k_1 = m_2 \cdot g \cdot k_2$

(Hiányos felírás esetén az egyes nyomatékok felírása darabonként 1 pontot, az egyensúly általános feltételeinek megfogalmazása szintén egy pontot ér.

A formális egyenletfelírás helyett szöveges gondolatmenet is elfogadható.
Szintén elfogadható, ha a nyomatékegyenletben csak a nyomatékok egyensúlya szerepel (pl. $N_1 - N_F = N_2$), amennyiben később kiderül, hogy melyik nyomaték pontosan melyik erő, illetve erőkar szorzata.

Ha a jelölt csak egy, a mellékelthez hasonló ábrát készít, amelyen az egyensúlyt létrehozó erők részben vagy egészben helyesen vannak feltüntetve, az a) részre maximum 3 pontot lehet adni.)



Rendezés és számítás:

2 + 1 pont

$F = \dfrac{m_1 \cdot g \cdot k_1 - m_2 \cdot g \cdot k_2}{k_1}$, melyből $F = 50\,\mathrm{N}$

(Ha az egyenletben valamelyik forgatónyomaték előjele hibás, az a) részre maximum 4 pont adható.)

b) *A nyomatékegyenlet felírása a kétkarú mérleg egyensúlyára:*

4 pont

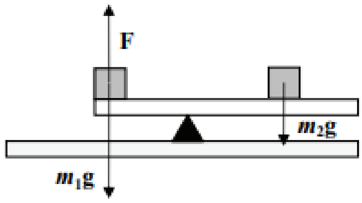
$m_1 \cdot g \cdot k_1 - F' \cdot k_1 = m_2 \cdot g \cdot k_2'$

(Hiányos felírás esetén az egyes nyomatékok felírása darabonként 1 pontot, az egyensúly megfogalmazása szintén egy pontot ér.

A formális egyenletfelírás helyett szöveges gondolatmenet is elfogadható.

Szintén elfogadható, ha a nyomatékegyenletben csak a nyomatékok egyensúlya szerepel (pl. $N_1 - N_F = N_2$), amennyiben később kiderül, hogy melyik nyomaték pontosan melyik erő, illetve erőkar szorzata.

Ha a jelölt csak egy, a mellékelthez hasonló ábrát készít, amelyen az egyensúlyt létrehozó erők részben vagy egészben helyesen vannak feltüntetve, az b) részre maximum 3 pontot lehet adni. Ha a jelölt mindkét részben csak a rajzot készítette el, akkor összesen maximum 4 pontot kaphat.)



Rendezés és számítás:

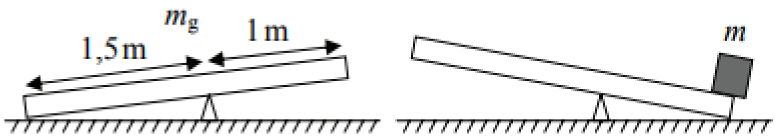
2 + 1 pont

$$k_2' = \frac{m_1 \cdot g \cdot k_1 - F' \cdot k_1}{m_2 \cdot g},\ \text{amiből}\ k_2' = 1{,}25\ \text{m}$$

(Ha az egyenletben valamelyik forgatónyomaték előjele hibás, a b) részre maximum 4 pont adható.)

Összesen 14 pont

4. Egy 60 kg tömegű gerenda (homogén hasáb) egy éken nyugszik. Az alátámasztás az egyik végtől 1m-re, a másiktól 1,5 m-re van. A levegőben lévő végre m tömegű testet téve a gerenda átbillen. (A gerenda vastagsága elhanyagolható a hosszához képest.) Mekkora ez a tömeg? (g = 10 m/s^2)



(2011. május)

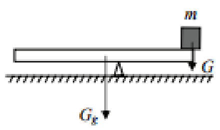
Megoldás:

Adatok: $m_g = 60\,\text{kg}$, $l_1 = 1{,}5\,\text{m}$, $l_2 = 1\,\text{m}$, $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Annak felismerése, hogy az egyensúlyi állapotot kell vizsgálni:

1 pont

(Az egyensúly szükségességének felismerését egyértelműen jelöli a vízszintesen rajzolt gerenda, de mivel ferde helyzetben is létrejöhet egyensúly, e felismerést valamilyen megfogalmazás vagy a számítás gondolatmenete is mutathatja.)



A ható erők megfogalmazása, értékük meghatározása:

4 pont
(bontható)

A rúdra ható gravitációs erő a rúd középpontjában hat (2 pont).
(Ha a vizsgázó két részre bontja a rudat, s így a rá ható gravitációs erőt is, akkor e megoldás helyességének függvényében a 2 pont bontható.)
$G_g = m_g \cdot g = 600\,\text{N}$ (1 pont).
A rúd végén lévő tömegre ható gravitációs erő $G = m \cdot g$ (1 pont).
(A G erő berajzolása is elég.)

A forgatónyomatékok egyensúlyának felismerése:

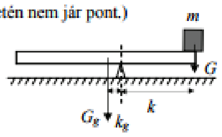
2 pont

(Szöveges megfogalmazás vagy a megoldás menete alapján)

Az erőkarok meghatározása:

1 + 1 pont

$k_g = 0{,}25\,\text{m}$, $k = 1\,\text{m}$ (amennyiben a rúd vízszintes helyzetű)
(Ha a vizsgázó az egyensúlyi helyzetet nem vízszintes rúddal veszi fel, az erőkarok a fenti értékekkel csak arányosak. Ha az arányosságot említi, és a konkrét számításban a fenti értékek szerepelnek, a 2 pont megadandó. Hibás erőkar-megállapítás esetén nem jár pont.)



A nyomaték-egyenlet megfogalmazása, G meghatározása:

5 pont
(bontható)

$G_g \cdot k_g = G \cdot k$ (2 pont)
(A rúd tömegének felbontása esetén: $G_1 \cdot k_1 = G_2 \cdot k_2 + G \cdot k$, ahol $G_1 + G_2 = G_g$.)

$600\ \mathrm{N} \cdot 0{,}25\ \mathrm{m} = G \cdot 1\ \mathrm{m}$, amiből $G = 150\ \mathrm{N}$ (1 + 1 + 1 pont)
(A rúd tömegének felbontása esetén: $360\ \mathrm{N} \cdot 0{,}75\ \mathrm{m} = 240\ \mathrm{N} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} + G \cdot 1\ \mathrm{m}$,
$G = 150\ \mathrm{N}$)

A tömeg meghatározása:

2 pont
(bontható)

$m > 15\ \mathrm{kg}$

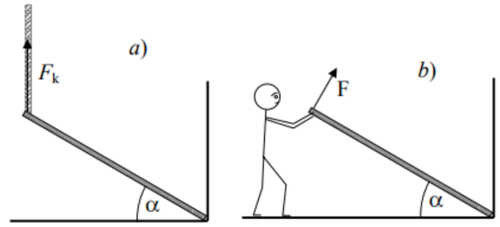
A számérték megadása (1 pont).
Annak felismerése, hogy a tömeg az egyensúlyhoz tartozó tömegnél nagyobb kell, hogy legyen (1 pont).
(Az egyensúlyi tömegnél nagyobb tömeg lehetőségét a vizsgázó a feladatmegoldás bármely pontján közölheti.)

***

(Ha valaki nem forgatónyomatékkal számol, hanem a rúd és nehezék együttesét pontrendszerként kezeli és a feladatot helyesen oldja meg, akkor is jár a maximális pontszám.)

Összesen 16 pont

5. **Egy szabályos hasáb alakú, homogén gerenda egyik vége a fal mellett a földön nyugszik, másik végét egy függőleges kötél tartja. A gerenda a földdel α = 30o -os szöget zár be, tömege 20 kg, hossza 3 m. (2 s m g = 10)**
a) Mekkora a kötélerő? (a) ábra)
b) A kötél helyett a gerendát egy ember tartja az eredeti helyzetben, úgy, hogy kezének nyomóereje merőleges a gerendára. (b) ábra) Mekkora ez a nyomóerő?



(2011. május id.)

Megoldás:

Adatok: $m = 20$ kg, $l = 3$ m, $\alpha = 30°$, $g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

A megoldás két változatát I. és II. jelöli.

a) *Az egyensúly egy szükséges feltételének megfogalmazása:*

1 pont

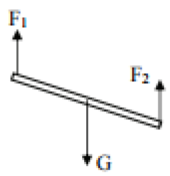
I.: A gerendára ható erők eredője nulla.
vagy II.: A gerendára ható erők (valamely pontra vonatkozó) forgatónyomatékainak összege nulla.
(Ha a feltétel megfogalmazása hiányzik, de a megoldásból egyértelműen kitűnik, hogy a vizsgázó e feltételt tudatosan alkalmazza, akkor a pontszám jár.)

Az egyensúly kvantitatív megfogalmazása:

4 pont (bontható)

I.: A gerendára ható három, párhuzamos hatásvonalú erő rajza (1 pont)
(A pontszám akkor is jár, ha a rajzon F_1 és F_2 nem egyenlő nagyságú.)

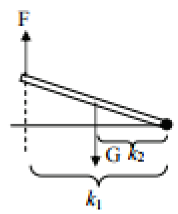
és az erőkre vonatkozó egyenlet valamely alakja, pl.: $F_1 + F_2 = G$ (1 pont)



Mivel a párhuzamos F_1 és F_2 erő eredője a rúd közepén hat, ezért $F_1 = F_2$ (1 pont),
és így $2F = G$. (1 pont)

vagy II.: A gerendára ható két erő és az erőkarok rajza (1 pont)

és a forgatónyomatékokra vonatkozó egyenlet valamely alakja, pl.:
$F \cdot k_1 = G \cdot k_2$ (1 pont)
(amennyiben a forgáspont a harmadik erő hatásvonalában van.)



Mivel $k_1 = 2\,k_2$, (1 pont)
ezért $2\,F = G$. (1 pont)

A kötélerő megadása:

1 pont

$F = \frac{G}{2} = 100$ N

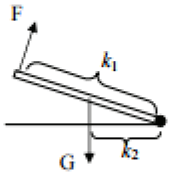
b) *A forgatónyomatékok egyensúlyának felismerése:*

1 pont

$F \cdot k_F = G \cdot k_G$ (amennyiben a forgáspont a rúd letámasztott vége)

Az erőkarok megállapítása rajzban:

3 pont
(bontható)



$k_1 = l$, k_2 a forgáspont és G hatásvonalának távolsága.
(E felismerésekért a 3 pont rajz nélkül is megadandó.)

Számítás és eredmény:

4 pont
(bontható)

$$k_2 = \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha$$

$$F \cdot l = G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha$$

$$F = G \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 30°$$

$$F = 87\ \mathrm{N}$$

Összesen 14 pont